ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ МОДУЛЯ.

Некоторые уравнения и неравенства с модулем можно решить, не прибегая к раскрытию модуля. Приемы решения этих задач основаны на применении свойств модуля. Ниже приводятся свойства модуля и приводятся примеры применения этих свойств для решения уравнений и неравенств.

Свойство 1. Модуль любого числа есть число неотрицательное, то есть

$|a| \geq 0, \forall a \in R.$

Доказательство. Если $a \geq 0$, то по определению $|a| = a \geq 0$. Если $a \leq 0$, то по определению $|a| = -a \geq 0$ Таким образом, $|a| \geq 0, \forall a \in R$.

Пример 1. Решить уравнение $|x^2 - x - 3| = 2 - \sqrt{5}$.

Решение. Так как $2 - \sqrt{5} < 0$, а по свойству 1 модуль любого выражения есть число неотрицательное, то данное уравнение корней не имеет.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2 + 5x + 9| = 2x - 9 - x^2$.

Решение. Квадратный трехчлен, стоящий в правой части уравнения всегда отрицателен, так как его дискриминант D<0, и старший коэффициент тоже меньше нуля. По свойству 1 модуль не может принимать отрицательных значений, поэтому исходное уравнение не имеет корней.

Свойство 2. Модули противоположных чисел равны, то есть

$|a| = |-a|, \forall a \in R.$

Доказательство. $|-a| = \begin{cases} -a, -a \geq 0 \\ -(-a), -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, a \leq 0 \\ a, a \geq 0 \end{cases} = |a|.$

Это свойство позволяет менять знак выражения, находящегося под знаком модуля.

Пример 3. Решить уравнение $\left|\frac{1}{2x-3} - \frac{2}{x+4}\right| = \left|\frac{2}{x+4} - \frac{1}{2x-3}\right|$.

Решение. По свойству 2 уравнение можно переписать в виде

$$\left|\frac{1}{2x-3} - \frac{2}{x+4}\right| = \left|\frac{1}{2x-3} - \frac{2}{x+4}\right|$$

Решением этого уравнения будет область определения выражения $\left(\frac{1}{2x-3} - \frac{2}{x+4}\right)$, то есть множество действительных чисел, исключая числа -4 и $\frac{3}{2}$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-4; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Свойство 3. Арифметический корень из квадрата любого числа есть модуль этого числа, то есть

$\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in R.$

Доказательство. $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, a \ge 0 \\ -a, a \le 0 \end{cases} = |a|.$

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{1+\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Решение. Преобразуем по формуле понижения степени подкоренное выражение , получим равносильное уравнение

$\sqrt{2\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

По свойству 3 имеем равносильные уравнения

$\sqrt{2}|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |\cos x| = \frac{1}{2}$

Откуда предыдущее уравнение равносильно следующей системе

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. .$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z..$

При изложении свойства 3 очень важно показать разницу между выражениями $\sqrt{a^2}$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2$, так как часто учащиеся считают эти выражения равными друг другу. По свойству 3 $\sqrt{a^2} = |a|$. По свойству арифметического корня $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, если $a \ge 0$.

Таким образом, область определения первого выражения: $a \in (-\infty; +\infty)$; область определения второго выражения: $a \in [a; +\infty)$, что показывает их неравносильность.

Свойство 4. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа, то есть

$|a|^2 = a^2, \forall a \in R.$

Доказательство. $|a|^2 = |a||a| = \begin{cases} aa, a \ge 0 \\ (-a)(-a), a \le 0 \end{cases} = \begin{cases} a^2, a \ge 0 \\ a^2, a \le 0 \end{cases} = a^2.$

Пример 5. Решить уравнение $4x^2 - 2|2x-1| = 34 + 4x$.

Решение.

$$4x^2 - 2|2x-1| = 34 + 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 34 - 2|2x-1| = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 2|2x-1| - 35 = 0$$

Часто учащиеся не замечают возможности воспользоваться свойством 4, преобразовав a^2 в $|a|^2$. Для них представляет трудность чтение формулы «справа налево». Это связано с тем, что обычно примеры равносильные преобразованиям решаются только в одну сторону равносильности и не рассматривается возможность применения равносильности в обратном порядке.

Возвращаясь к решению примера, можно записать

$$|2x-1|^2-2|2x-1|-35=0$$

Вводя замену $t=|2x-1|$ и решая полученное уравнение, находим: $t_1=7, t_2=-5.$ возвращаясь к прежней переменной, получаем систему:

$$\left[\begin{array}{l} |2x-1|=7 \\ |2x-1|=-5 \end{array}\right.$$

Второе уравнение решений не имеет, так как по свойству 1 модуль не может быть отрицательным

$$|2x-1|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=7 \\ 2x-1=-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-3; x_2=4$.

Пример 6. Решить уравнение $1+2|\sin x|=2\cos 2x.$

Решение. Так как

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

то получаем равносильное уравнение

$$4\sin^2 x+2|\sin x|-1=0$$

Применяя свойство 4, получаем равносильное уравнение $4|\sin x|^2+2|\sin x|-1=0$,

решая это уравнение как квадратное относительно $|\sin x|$, находим

$$|\sin x|=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$|\sin x|=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Откуда в силу свойства 1 получаем

$$|\sin x|=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Далее можно воспользоваться свойством 3:

$\sqrt{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$. Так как $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, то предыдущее уравнение равносильно следующему уравнению

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}<1\right)$$

Решая это уравнение, получаем

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Свойство 5. Модуль числа не меньше самого числа, то есть

$$|a| \ge a, \forall a \in R.$$

Доказательство. Если $a \ge 0$, то по определению $|a| = a$, значит свойство 5-верно;

если $a \le 0$, то по определению $|a| = -a > 0 > a$, значит свойство 5-верно.

При решении уравнений и неравенств чаще всего пользуются не самим свойством 5, а его следствием:

$$|a| - a \ge 0.$$

Пример *7*. Решить неравенство $2^{|1-3x|} \le \frac{1}{2} \cdot 2^{3x}$.

Решение.

$$2^{|1-3x|} \le \frac{1}{2}2^{3x} \Leftrightarrow 2^{|1-3x|} \le 2^{3x-1} \Leftrightarrow |1-3x| \le 3x-1$$

По свойству 2 предыдущее неравенство равносильно следующему неравенству $|3x-1| \le 3x-1$.

По свойству 5 модуль числа не может быть меньше самого числа, поэтому получаем $|3x-1| = 3x-1$.

По определению модуля

$$3x - 1 \ge 0$$

$$x \ge \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Пример 8. Решить неравенство $x - |x| \le \frac{1}{x^2}$.

Решение.

$$x - |x| \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow |x| - x \ge -\frac{1}{x^2}$$

В силу того что

$$|x| - x \ge 0$$

$$\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < 0$$

,

неравенство выполняется на всей области определения, то есть для $x \ne 0$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Свойство 6. Модуль произведения чисел равен произведению модулей чисел, а модуль частного – частному модулей.

$|ab| = |a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Доказательство.

1) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$.

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$.

Пример 9. Решить уравнение $\left|x - \frac{x^2}{4} - 1\right| = 36$.

Решение.

$$\left|x - \frac{x^2}{4} - 1\right| = 36 \Leftrightarrow \left|\frac{4x - x^2 - 4}{4}\right| = 36 \Leftrightarrow \left|x^2 - 4x + 4\right| = 144 \Leftrightarrow \left|(x-2)^2\right| = 144$$

По свойству (4) предыдущее уравнение равносильно уравнению

$(x-2)^2 = 144 \Leftrightarrow |x-2| = 12$

Предыдущее уравнение равносильно системе уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x-2=12 \\ x-2=-12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=14 \\ x=-10 \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1 = -10; x_2 = 14$.

Свойство 7. Сравнение модулей двух чисел равносильно сравнению их квадратов.

1) $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

2) $|x| \le |y| \Leftrightarrow x^2 \le y^2$

3) $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$

4) $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$

5) $|x| \ge |y| \Leftrightarrow x^2 \ge y^2$

Доказательство этих свойств вытекает из неотрицательности любого модуля и монотонного возрастания функции $f = t^2$ на множестве неотрицательных чисел.

Докажем, например, первое утверждение. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

По свойству 1 $|x| \ge 0, |y| \ge 0$. $|x| < |y| \Leftrightarrow (|x|)^2 < (|y|)^2$ (в силу монотонного возрастания функции $f = t^2$ на множестве неотрицательных чисел). По свойству 4 $|x|^2 < |y|^2 \Leftrightarrow x^2 < y^2$. Таким образом, $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Свойство 7 лежит в основе решения задач с модулем методом возведения в квадрат.

Пример 10. Решить неравенство $|2x-1| > |x+2|$.

Решение. Воспользуемся свойством 7

$$|2x-1|>|x+2| \Leftrightarrow (2x-1)^2>(x+2)^2 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1>x^2+4x+4 \Leftrightarrow 3x^2-8x-3>0$$

Решая это неравенство, получаем равносильную систему

$$\left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{3} \\ x>3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$.

Пример 11. Решить неравенство $5^{|x+1|}-25^{|x-1|}\le 0$.

Решение.

$$5^{|x+1|}-25^{|x-1|}\le 0 \Leftrightarrow 5^{|x+1|}\le 5^{2|x-1|} \Leftrightarrow |x+1|\le 2|x-1|$$

По свойству 7 предыдущее неравенство равносильно неравенству

$$(x+1)^2\le 4(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\le 4x^2-8x+4 \Leftrightarrow 3x^2-10x+3\ge 0$$

Решая неравенство, получаем равносильную систему

$$\left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le\dfrac{1}{9} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{9}\right]\cup[2;+\infty)$.

Пример 12. Решить уравнение $\log_2|3-2x|=\log_4\left(x^2-6x+9\right)$.

Решение.

$$\log_2|3-2x|=\log_4\left(x^2-6x+9\right) \Leftrightarrow \log_2|3-2x|=\frac{1}{2}\log_2(x-3)^2 \Leftrightarrow \log_2|3-2x|=\log_2|x-3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3-2x|>0 \\ |x-3|>0 \\ |3-2x|=|x-3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\dfrac{3}{2} \\ x\ne 3 \\ \left[\begin{array}{l} 3-2x=x-3 \\ 3-2x=3-x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\dfrac{3}{2} \\ x\ne 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=0; x_2=2$.

Свойство 8. Числа неотрицательны тогда и только тогда, когда их сумма равна сумме модулей этих чисел, то есть

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=x_1+x_2+\ldots+x_n \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \\ \ldots \\ x_n\ge 0 \end{cases}.$$

Доказательство.

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=x_1+x_2+\ldots+x_n \Leftrightarrow \left(|x_1|-x_1\right)+\left(|x_2|-x_2\right)+\ldots+\left(|x_n|-x_n\right)=0$$

В круглых скобках в силу свойства 7 находятся неотрицательные числа. Поэтому их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда все числа равны нулю, то есть

$$\begin{cases} |x_1|-x_1=0 \\ |x_2|-x_2=0 \\ \ldots \\ |x_n|-x_n=0 \end{cases}$$

В силу замечания 2 последняя система означает, что все числа неотрицательны, то есть

$$\begin{cases} x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \\ \ldots \\ x_n\ge 0 \end{cases}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 13. Решить уравнение $|x-5|+|x+8|=2x+3$.

Решение. Если заметить, что $2x+3=(x-5)+(x+8)$, то можно применить свойство 8

$$|x-5|+|x+8|=(x-5)+(x+8) \Leftrightarrow \begin{cases} x-5\ge 0 \\ x+8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\ge -8 \end{cases}.$$

Ответ: $[5;+\infty)$.

Свойство 9. Числа неположительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей противоположна сумме этих чисел, то есть

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=-x_1-x_2-\ldots-x_n \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\le 0 \\ x_2\le 0 \\ \ldots \\ x_n\le 0 \end{cases}.$$

Доказательство.

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=-x_1-x_2-\ldots-x_n \Leftrightarrow \left(|x_1|+x_1\right)+\left(|x_2|+x_2\right)+\ldots+\left(|x_n|+x_n\right)=0$$

В скобках стоят неотрицательные выражения (так как $|a|\ge -a, \forall a\in R$). Поэтому их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда все числа равны нулю, то есть

$$\begin{cases} |x_1|+x_1=0 \\ |x_2|+x_2=0 \\ \ldots \\ |x_n|+x_n=0 \end{cases}$$

В силу замечания 2 эта система означает, что все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не положительны, то есть

$$\begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 \le 0 \\ \dots \\ x_n \le 0 \end{cases}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 3. Свойства 8 и 9 можно объединить

$$|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_1 \ge 0 \\ \alpha_2 x_2 \ge 0 \\ \dots \\ \alpha_n x_n \ge 0 \end{cases}, \text{ где } \alpha_i = 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

Свойство 10. Числа одновременно неотрицательны или одновременно положительны тогда и только тогда, когда сумма их модулей равна модулю их суммы, то есть

$$|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = |x_1+x_2+\dots+x_n| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ \dots \\ x_n \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 \le 0 \\ \dots \\ x_n \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности получаем $|x|+|y| = |x+y| \Leftrightarrow xy \ge 0.$

Доказательство.

$$\left[\begin{array}{l} |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = |x_1+x_2+\dots+x_n| \\ \begin{cases} |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = x_1+x_2+\dots+x_n \\ x_1+x_2+\dots+x_n \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = -x_1-x_2-\dots-x_n \\ x_1+x_2+\dots+x_n \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ \dots \\ x_n \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 \le 0 \\ \dots \\ x_n \le 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Свойство 11. $|x|+|y| = |x-y| \Leftrightarrow xy \le 0.$

Доказательство.

$$\left[\begin{array}{l} |x|+|y| = x-y \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} |x|+|y| = -(x-y) \\ \begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \end{array}\right., \text{ то есть } \left[\begin{array}{l} |x-y| = |x|+|y| \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Пример 14. Решить неравенство $|9x-3|+|1-x|\le|8x-2|$.

Решение. Можно заметить, что $(9x-3)+(1-x)=8x-2$. По свойству 11 получаем равносильное неравенство $(9x-3)(1-x)\ge 0$.

Решая это неравенство, получаем $\frac{1}{3}\le x\le 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{3};1\right]$.

Пример 15. Решить уравнение $|2x+5|+|4-x|=|3x+1|$.

Решение. Если заметить, что $(2x+5)+(4-x)=3x+1$, то можно применить свойство 11

$$(2x+5)(4-x)\le 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{2}\right)(4-x)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{5}{2}\\x\ge 4\end{cases}.$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)\cup(4;+\infty)$.

Свойство 12. Если модули чисел равны, то числа либо равны, либо противоположны, то есть $|x|=|y|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.$.

Доказательство. $|x|=|y|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=|y|\\x=-|y|\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\-x=y\\x=-y\\-x=-y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=-y\end{array}\right.$.

Пример 16. Решить уравнение $\log_{\pi}|x^2-1|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|$.

Решение.

$$\log_{\pi}|x^2-1|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|\Leftrightarrow\log_{\pi}|x^2-1|=2\log_{\pi}|x|\Leftrightarrow\log_{\pi}|x^2-1|=\log_{\pi}|x|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x^2-1|>0\\|x|^2>0\\|x^2-1|=|x|^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\x\ne 1\\x\ne -1\\|x^2-1|=|x|^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\x\ne 1\\x\ne -1\\\left[\begin{array}{l}x^2-1=x^2\\x^2-1=-x^2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\x\ne 1\\x\ne -1\\x^2=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\\x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}};x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Свойство 13. $|x\pm y|\le|x|+|y|$.

Пример 17. Решить неравенство $|3x-8|-|3x-2|\ge 6$.

Решение.

$$\left|3x-8\right|-\left|3x-2\right|\ge 6 \Leftrightarrow \left|3x-8\right|\ge\left|3x-2\right|+\left|-6\right| \Leftrightarrow \left|(3x-2)+(-6)\right|\ge\left|3x-2\right|+\left|-6\right|.$$

По свойству 13 левая часть неравенства не может быть больше правой, поэтому остается случай, когда они равны.

$$\left|(3x-2)+(-6)\right|=\left|3x-2\right|+\left|-6\right|$$

По свойству 11 предыдущее равенство равносильно неравенству

$$\left|(3x-2)+(-6)\right|\ge 0 \Leftrightarrow (3x-2)(-6)\ge 0 \Leftrightarrow (3x-2)\le 0 \Leftrightarrow x\le\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С МОДУЛЕМ

После изучения основных свойств модуля, следует рассматривать методы, которыми можно решать задачи с модулем. Изучение этой темы следует начинать с рассмотрения частных методов, которые наиболее эффективны для определенного класса задач. В дальнейшем следует провести анализ решения примера универсальным методом и специфическим, сравнить их, и показать, насколько знание дополнительных методов упрощает решение задач. Это позволяет учащимся самим выбирать способ решения, который наиболее подходит к данному примеру.

МЕТОД СХЕМ РАВНОСИЛЬНОСТИ

Суть этого метода заключается в использовании специальных схем, которые позволяют выражение с модулем свести к равносильным неравенствам и уравнениям без модуля. Этот метод наиболее наглядный и алгоритмизированный. Он позволит лучше усвоить понятие модуля, запомнить свойства, и решать большой класс задач.

1) $$\left|f(x)\right|=\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x)\\ f(x)=-\varphi(x)\end{array}\right.\end{cases} \qquad (1)$$

2) $$\left|f(x)\right|=\left|\varphi(x)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x)\\ f(x)=-\varphi(x)\end{array}\right. \qquad (2)$$

3) $$\left|f(x)\right|<\varphi(x) \Leftrightarrow -\varphi(x)< f(x)<\varphi(x) \qquad (3)$$

$$\left|f(x)\right|\le\varphi(x) \Leftrightarrow -\varphi(x)\le f(x)\le\varphi(x) \qquad (4)$$

4) $\left|f(x)\right|>\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)>\varphi(x)\\ f(x)<-\varphi(x)\end{array}\right.$ (5)

$\left|f(x)\right|\geq\varphi(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\geq\varphi(x)\\ f(x)\leq-\varphi(x)\end{array}\right.$ (6)

Применение этого метода значительно упрощает решение определенного класса задач, подходящих под эти схемы равносильности. Сложность заключается в запоминании всех этих схем, но при решении достаточно большого количества примеров, схемы применяются учащимися уже автоматически.

Пример 1. Решить уравнение:

$\left|5x+2\right|=3-3x.$

Решение. Воспользовавшись схемой (1)

$$\left|5x+2\right|=3-3x\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x+2=3-3x\\ 5x+2=3x-3\end{array}\right.\\ 3-3x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{8}\\ x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{8}\\ x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{5}{2};x_2=\dfrac{1}{8}.$

Пример 2. Решить неравенство:

$\left|3x-2\right|>2x+1.$

Решение. Воспользуемся схемой (5)

$$\left|3x-2\right|>2x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-2>2x+1\\ 3x-2>-2x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<\dfrac{1}{5}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(3;+\infty\right).$

Пример 3. Решить уравнение :

$\left|ctg^2 2x+8\sqrt{-ctg 2x}-3\right|=\left|ctg^2 2x-8\sqrt{-ctg 2x}-3\right|.$

Решение. Введем замену: пусть $t=\sqrt{-ctg 2x},t\geq 0.$

$$\left|t^4+8t-3\right|=\left|t^4-8t-3\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^4+8t-3=t^4-8t-3\\ t^4+8t-3=-t^4+8t+3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16t=0\\ t^4=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=\sqrt[4]{3}\\ t=-\sqrt[4]{3}\end{array}\right.$$

$t=-\sqrt[4]{3}$ -посторонний корень, так как $t\geq 0$.

$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\sqrt[4]{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{-ctg\,2x}=0 \\ \sqrt{-ctg\,2x}=\sqrt[4]{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ctg\,2x=0 \\ ctg\,2x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi\kappa}{2}, \kappa\in Z \\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi\kappa}{2}, x_2=\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi\kappa}{2}, \kappa\in Z.$

МЕТОД ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ

Этот метод также является частным и лучше всего подходит для решения выражений вида $|f|\vee|\varphi|$, где под знаком $\vee$ стоит один из следующих знаков: $>,\geq,<,\leq,=$.

Метод возведения в квадрат основывается на следующем факте: так как сравнение неотрицательных чисел равносильно сравнению их квадратов, то сравнение двух модулей равносильно сравнению квадратов их подмодульных выражений, то есть

$$|f|\vee|\varphi| \Leftrightarrow f^2\vee\varphi^2$$

Доказательство этого утверждения заключается в следующем:
Например, для знака «<»:

$|f(x)|<|\varphi(x)| \Leftrightarrow \left(|f(x)|\right)^2<\left(|\varphi(x)|\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2<\left(\varphi(x)\right)^2$, так как $|a|^2=a^2, \forall a$

Решая полученное неравенство, его можно преобразовать к следующему виду

$$\left(f(x)\right)^2<\left(\varphi(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-\left(\varphi(x)\right)^2<0 \Leftrightarrow \left(f(x)-\varphi(x)\right)\left(f(x)+\varphi(x)\right)<0$$

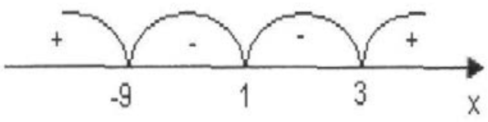
Таким образом, выражение $f(x)\vee\varphi(x)$ сводится к более простому выражению $\left(f(x)-\varphi(x)\right)\left(f(x)+\varphi(x)\right)\vee 0.$

При использовании метода возведения в квадрат для уравнений вида $|f|=\varphi$ переход к уравнению $f^2=\varphi^2$ не является равносильным и могут возникнуть посторонние корни, от которых можно избавиться или путем подстановки в исходное уравнение, или путем установления дополнительных условий (например, выполнения условия $\varphi\geq 0$)

Пример 4. Решить неравенство: $|x^2+2x-3|\geq|6x-6|$.

Решение. Воспользуемся методом возведения в квадрат

$$|x^2+2x-3|\geq|6x-6| \Leftrightarrow \left(x^2+2x-3\right)^2\geq\left(6x-6\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2+2x-3\right)^2-\left(6x-6\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+8x-9\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x-1\right)^2\left(x+9\right)\geq 0$$



$$\begin{cases} x \le -9 \\ x \ge 3 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-9] \cup [3;+\infty) \cup \{1\}$.

Пример 5. Решить уравнение:

$|2x^2 + x - 1| = |x+1|$.

Решение. Этот пример можно решить, воспользовавшись схемой равносильности (2) или методом возведения в квадрат

Способ 1. Решим пример по схеме равносильности (2)

$$|2x^2+x-1| = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-1 = x+1 \\ 2x^2+x-1 = -x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-2=0 \\ 2x^2+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x^2-1)=0 \\ 2x(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)(x-1)=0 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-1; x_2=0; x_3=1.$

Способ 2. Воспользуемся методом возведения в квадрат.

$$|2x^2+x-1| = |x+1| \Leftrightarrow (2x^2+x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$(2x^2+x-1)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$$(2x^2+x-1-x-1)(2x^2+x-1+x+1)=0$$

$$(2x^2-2)(2x^2+2x)=0$$

$$2(x+1)(x-1)(2x)(x+1)=0$$

$$4x(x+1)^2(x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-1; x_2=0; x_3=1.$

Трудность в применении этих способов могут возникнуть при нахождении корней промежуточных уравнений. В целом, оба способа похожи и легки в применении. Метод возведения в квадрат более нагляден и не требует запоминания специальной схемы, но этот метод применим только для узкого круга задач. Сходство этих способов заключается в том, что они приводят к решению одинаковых уравнений, только в способе 1 эти уравнения решаются отдельно друг от друга, а в способе 2 – в совокупности.

РАСКРЫТИЕ МОДУЛЯ НА ПРОМЕЖУТКАХ

Этот метод основан на том, что значения переменной x разбивают область определения уравнения (неравенства) на интервалы, на каждом из которых любое выражение под знаком модуля для всех значений x имеет один и тот же знак, то есть либо всегда положительно, либо отрицательно. Этот метод можно разделить на несколько этапов.

1. Приравниваем к нулю выражения под знаком модулей, и находим эти корни $x_1, x_2 ... x_n$.

2. Располагаем полученные корни по возрастанию на числовой оси значений переменной x. Точки $x_1, x_2 ... x_n$ разобьют числовую ось на (n+1) интервалов.

3. На полученном рисунке для каждого подмодульного выражения определяем его знак на соответствующих интервалах. Для этого нужно взять конкретное числовое значения переменной x и подставить в выражение, знак которого определяется. Над осью переменной x записываются неравенства, задающие интервалы. Причем в двойных неравенствах один из знаков задает нестрогое неравенство, а другой – строгое. Это позволяет в дальнейшем облегчить анализ полученных результатов и избежать совпадения корней.

4. Решаем исходное уравнение (неравенство) на каждом из полученных интервалов (интервалов знакопостоянства подмодульных функций), учитывая его знак на этом интервале.

Пример 6. Решить уравнение:

$|x-2|+|x-4|=3.$

Решение.

	$x \le 2$	$2 < x \le 4$	$x > 4$
$(x-2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$

Решим исходное неравенство на каждом из полученных интервалов.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2\\ x=\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}2<x\le 4\\ 2\ne 3\end{cases}\\ \begin{cases}x>4\\ x=\dfrac{9}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\frac{3}{2}; x_2=\frac{9}{2}$.

Пример 7. Решить неравенство :

$\left|x^2-4x+3\right|+\left|x^2-5x+6\right|\ge 1.$

Решение.

	$x\le 1$	$1<x\le 2$	$2<x\le 3$	$x>3$
(x^2-4x+3)	+	−	−	+
(x^2-5x+6)	+	+	−	+

Решим исходное неравенство на каждом из полученных интервалов.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x>3\end{array}\right.\\ 2x^2-9x+8\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\le 2\\ 2-x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2<x\le 3\\ 2x^2-9x+10\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x>3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x\ge \dfrac{9+\sqrt{17}}{4}\\ x\le \dfrac{9-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}1<x\le 2\\ x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}2<x\le 3\\ 2\le x\le 2,5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 2\\ 2\le x\le 2,5\\ x\ge \dfrac{9+\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;2]\cup[2;2,5]\cup\left[\frac{9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)$.

Метод раскрытия модуля на промежутках знакопостоянства подмодульных выражений является универсальным, но наиболее эффективен он при решении задач, содержащих сумму нескольких модулей. Затруднения могут возникнуть на первом этапе, когда требуется найти концы интервалов. Полученные уравнения могут иметь довольно сложное решение.

МЕТОД РАСКРЫТИЯ МОДУЛЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ РАСКРЫТИЕ МОДУЛЯ.

Этот метод заключается в использовании определения модуля. Если пример содержит несколько подмодульных выражений, то сначала раскрываем по определению «внутренний» модуль, а затем оставшиеся, получая совокупности систем, равносильные первоначальному выражению и не содержащие модуля. Решая полученные совокупности систем, находим корни, которые нужно затем проверить на совпадение или несовпадение, и формируем ответ.

Преимущества этого метода состоит в последовательности действий, позволяющей легко контролировать и проверять промежуточные результаты. Но необходимость раскрывать по определению каждый модуль, приводит к потере времени в решении большинства задач.

Пример 8. Решим уравнение. $\left|x|x-1|-2x\right| = x^2-2.$

Решение. Раскрываем сначала внутренний модуль

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0 \\ \left|x(x-1)-2x\right| = x^2-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\le 0 \\ \left|x(1-x)-2x\right| = x^2-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ \left|x^2-3x\right| = x^2-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ \left|x^2+x\right| = x^2-2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Раскроем внешний модуль

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x\ge 0 \\ x^2-3x = x^2-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-3x\le 0 \\ x^2-3x = 2-x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x^2+x\ge 0 \\ x^2+x = x^2-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x^2+x\le 0 \\ x^2+x = 2-x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-3)\ge 0(1) \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x-3)\le 0(2) \\ 2x^2-3x-2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x(x+1)\ge 0(3) \\ x = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x(x+1)\le 0(4) \\ 2x^2+x-2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая эти системы, получаем, что системы (1) и (4) решений не имеют. Решением системы (2) является $x = 2$, системы (3) $-x = -2$.

Ответ: $x_{1,2} = 2.$

МЕТОД ОДНОВРЕМЕННОГО РАСКРЫТИЯ МОДУЛЕЙ

Этот метод похож на предыдущий, отличие состоит в том, что неравенства для подмодульных выражений записываются одновременно для всех модулей.

Так как для раскрытия каждого модуля два возможных неравенства рассматриваются без учета аналогичных неравенств для раскрытия других модулей, то при наличии в задаче k модулей, приходится рассматривать 2^k различных случаев. При $k > 2$ это приводит к большому объему работы. В этом заключается главный недостаток этого метода. Данный способ лучше применять при наличии в задаче не более двух модулей. В этом случае рассматривается четыре возможных варианта:

1. (-,-) - оба выражения под знаком модуля рассматриваются отрицательными.

2. (-,+) - первое подмодульное выражение рассматривается как отрицательное, а второе - неотрицательное.

3. (+,-) - первое подмодульное выражение рассматривается неотрицательным, а второе - отрицательным.

4. (+,+) - оба подмодульных выражения рассматриваются неотрицательными. Решая полученные системы, находится ответ задачи.

Пример 9 .Решить уравнение. $\left||x|-2\right| = 2.$

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ (-x)-2 \le 0 \\ -x-2=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ (-x)-2 \ge 0 \\ -x-2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x-2 \le 0 \\ x-2=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x-2 \ge 0 \\ x-2=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -2 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 0 \\ x \le -2 \\ x=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 2 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge 2 \\ x=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=-4 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x_1 = -4; x_2 = 0; x_3 = 4.$

Решим этот пример с использованием схем равносильности

$$\left||x|-2\right|=2.$$

По схеме (20): $\left||x|-2\right|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} |x|-2=2 \\ |x|-2=-2 \end{array}\right. \end{cases},$

В силу первого неравенства, предыдущая система равносильна следующей системе уравнений

$$\left[\begin{array}{l} |x|-2=2 \\ |x|-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=4 \\ |x|=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4. \\ x=0 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-4; x_2=0; x_3=4.$

Таким образом, можно видеть, что применение специальных схем позволяет значительно упростить решение задачи, избежать дополнительного решения неравенств и уравнений.

Пример 10. Решить уравнение:

$$|5x+2|=3-3x.$$

Решение. Ранее этот пример был решен с использованием схем равносильности. Для сравнения решим его с помощью раскрытия модуля по определению.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x+2\ge 0 \\ 5x+2=3-3x \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+2\le 0 \\ -(5x+2)=3-3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -\dfrac{2}{5} \\ x=\dfrac{1}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} x\le -\dfrac{2}{5} \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{8} \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x_1=-\frac{5}{2}; x_2=\frac{1}{8}.$

Метод раскрытия модуля по определению является универсальным, его можно применить к любой задаче с модулем. Преимущество этого метода заключается в том, что кроме определения ничего не требуется знать. Но главным недостатком является большой объем работы, которую нужно провести при поиске ответа. Даже при решении простых задач метод раскрытия модуля по определению является не эффективным. Его следует изучать после изложения частных методов, чтобы показать нерациональность применения этого метода для большинства задач.

Сравнивая методы, можно выделять классы задач, для которых лучше использовать тот или иной метод. Это позволяет учащимся лучше ориентироваться при решении задач с модулем.